# Orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra (Research on algebraic combinatorics and representation theory of finite groups and vertex operator algebras)



島倉, 裕樹

数理解析研究所講究録 第2086巻 2018年 154-162



# Orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター
Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
e-mail: shimakura@m.tohoku.ac.jp

本稿では中央研究院 (台湾) の C.H. Lam 氏と筆者の最近の共同研究 [LS2] の解説を行う.

## 1 背景

我々が取り組んでいる問題は次である.

**問題 1.1.** 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数 (VOA) 注1を分類せよ.

まず, (有理的な) VOA $V$ の既約加群が同型を除いて $V$ だけの時に $V$ は正則という. 正則 VOA の中心電荷は 8 の正の倍数となることが知られており ([Zh96]), 中心電荷が 8, 16 の場合はユニモジュラ偶格子に付随する格子 VOA と同型となる ([DM04b]). したがって, 中心電荷 24 は考えるべき次の中心電荷である. また, (非同型な) 階数 32 のユニモジュラ偶格子は沢山あるため, (非同型な) 中心電荷 32 の正則 (格子) VOA も沢山あり, (通常の意味では) 分類するのは難しい.

「中心電荷 24 の正則 VOA の分類問題」は「階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類問題」の類似と考えることができる. 階数 24 のユニモジュラ偶格子は Niemeier によって分類されており, 丁度 24 個ある. これらは Niemeier 格子と呼ばれる. 一般に偶格子のノルム 2 のベクトルはルート系をなす. Niemeier 格子の構造はノルム 2 のベクトルがなすルート系から (同型の除いて) 一意的に決まることが知られている. したがって, Niemeier 格子は ($\emptyset$ を含む) 24 個のルート系で特徴付けられる. そこで, 中心電荷 24 の正則 VOA でも同様な分類を行いたい.

偶格子におけるノルム 2 は (非自明な) 最小ノルム注2である. そして, (CFT 型の) VOA の (非自明な) 最小共形重み注3 は 1 である. すると, (CFT 型の) VOA $V$ の共形重み 1 の

注1 本稿で扱う VOA は全て strongly regular, すなわち, 有理的, $C_2$-有限, CFT 型, 自己双対.
注2 ノルム 0 の零ベクトルを除くという意味.
注3 真空ベクトルは共形重み 0 であるが, それで張られる部分空間の除く, という意味.

空間 $V_1$ には 0-積でリー代数構造が入り ([Bo86]), これがルート系に対応する構造だと考えられている. さらに, 中心電荷 24 の正則 VOA の場合は, $V_1$ が半単純, 可換, 0 のいずれかになり ([DM04b]), 半単純の時には VOA 上で affine 表現を与える. そして, $V_1$ のリー代数の可能性のリストが Schellekens によって与えられている ([Sc93]). 最近, この VOA の範疇での (数学的な) 証明が [EMS18+] で与えられた.

**定理 1.2.** [Sc93, EMS18+] 中心電荷 24 の正則 VOA $V$ に対して, $V_1$ の (レベル付) リー代数構造は 71 通りのいずれかとなる.

[Sc93] で与えられた具体的な 71 個のリー代数のリストは Schellekens のリストと呼ばれる. すると, 問題 1.1 は次のように書き換えられる.

**問題 1.3.** $\mathfrak{g}$ を Schellekens のリストのリー代数とする.

(1) $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となるような中心電荷 24 の正則 VOA $V$ を構成せよ.

(2) $V_1 \cong \mathfrak{g}$ となる中心電荷 24 の正則 VOA $V$ の一意性を証明せよ.

以下, (1) と (2) の現状を述べる.

## 1.1 問題 1.3 (1) (構成) について

(ルート系が $\emptyset$ の場合を除く) Niemeier 格子はノルム 2 のベクトルが生成するルート格子の拡大として得られる. この類似として, 重さ 1 の空間のリー代数が生成する affine VOA の拡大としての中心電荷 24 の正則 VOA の構成が考えられる. [Sc93] に正則 VOA の affine VOA の加群としての既約分解の候補が一つ与えられているが, その上に VOA 構造が入ることを証明するのは難しい.[注4]

現状では $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を用いて正則 VOA を構成する手法が取られている.[注5] この方法では, 正則 VOA $V$ と $V_1$ が生成する affine VOA の間に "良い" VOA[注6] を見つけ, その VOA の別方向の拡大として別の正則を構成する. 最近, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対する $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法の一般論が [EMS18+] で完成した. 以下, 大まかに構成の手順を述べる.

(1) $V$ を正則 VOA, $g \in \mathrm{Aut}V$ を有限位数 $n$ とする.

(2) $V^g = \{v \in V \mid g(v) = v\}$ は $V$ の部分 VOA となる.

(3) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, 既約 $g^i$-twisted $V$-加群 $V(g^i)$ が一意的に存在する ([DLM00]).

---

注4 格子 VOA の場合を除くと, affine VOA の単純カレント拡大となっていないため, 一般論が整備されていない.

注5 格子における neighborhood の類似と思われる.

注6 例えば, 全ての既約加群が単純カレントになっている. よって, 既存の拡大の理論が適用できる.

(4) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, $V(g^i)$ の共形重み[注7]が $(1/n)\mathbb{Z}_{>0}$ に入ると**仮定する**.[注8]

(5) 各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して, ある既約 $V^g$-部分加群 $\overline{V(g^i)} \subset V(g^i)$ で $\tilde{V}_g := V^g \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \overline{V(g^i)}$ が正則 VOA となるものが存在する. さらに, $\tilde{V}_g$ は $V^g$ の $\mathbb{Z}_n$-graded な単純カレント拡大となる.

既知の正則 VOA から $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を用いて新しい正則 VOA を構成することが個別に行われ, それら結果を合わせることで問題 1.3 (1) が解決されている. ([Bo86, FLM88, DGM96, La11, LS12, Mi13, SS16, EMS18+, LS16a, LS16b, LL]) しかしながら, 中心電荷 24 の正則 VOA をさらに深く理解するためには, 統一的な構成方法が期待される.

**問題 1.4.** 中心電荷 24 の正則 VOA を統一的な方法で構成せよ.

最近, G. Höhn がこの問題に対するアプローチを提案している ([Hö]).

## 1.2 問題 1.3 (2) (一意性) について

$V_1 = 0$ の場合は次の FLM 予想[注9]がある.

**予想 1.5.** [FLM88] 中心電荷 24 の正則 VOA $V$ が $V_1 = 0$ を満たすならば, $V$ はムーンシャイン VOA $V^\natural$ と同型.

次の仮定を加えた "弱" バージョンがいくつか証明されている.

- $V_2$ が $V_2^\natural$ と代数として同型 ([DGL07]).
- $V$ が $L(1/2,0)^{\otimes 48}$ を共通の共形元を持つ部分 VOA として持つ ([LY07]).
- $V$ が $L(1/2,0)^{\otimes 2}$ を部分 VOA として持つ ([ALY18+]).

しかしながら, $V_1 = 0$ の仮定だけからでは $V_2$ の構造について殆どわからない. 例えば $L(1/2,0)$ が一つ含まれる事も示されていない. ゆえに, 現時点では FLM 予想の解決にはまだ遠いと思われる.

さて, $V_1 \neq 0$ の場合に関する一意性の結果の現状をまとめておく.

合計: (新しく証明された個数), コメント, [文献]

24: (+24) Niemeier 格子 $N$ に付随する格子 VOA $V_N$ [DM04a].

26: (+2) 枠付正則 VOA 一意性の系として $A_{1,2}^{16}$ と $B_{8,1}E_{8,2}$ [LS15].

---

注7 $L(0)$ の作用で $V(g^i)$ に重みが入るが, その最小値

注8 この仮定があれば $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法が適用できる, というのが [EMS18+] の主結果の一つである.

注9 ルート系が $\emptyset$ の Niemeier 格子は同型を除いて一意的である ([Co69]). このような格子はリーチ格子と呼ばれる. この予想はリーチ格子の一意性の VOA 類似と考えられる.

27: (+1) Mirror 拡大等を用いて証明された $A_{8,3}A_{2,1}^2$ の場合 [LL].

30: (+3) $(\widetilde{V_N})_\psi$, $\psi$ は $N$ の位数 3 の等長写像の持ち上げ [LS1].

43: (+13) $(\widetilde{V_N})_\theta$, $\theta$ は $N$ の $-1$-写像の持ち上げ [KLL18+].

57: (+14) $(\widetilde{V_N})_\psi$, $\psi$ は $N$ の $2,4,5,6,8$ のいくつかの等長写像の持ち上げ [EMS]

62: (+5) $(\widetilde{V_\Lambda})_\psi$, $\psi$ はリーチ格子 $\Lambda$ の位数 $4,5,6,7,8$ の等長写像の持ち上げ [LS2].

したがって, $V_1=0$ の場合を除くと, 未証明の場合が 8 個残されている. また, 上の最後の 4 つの場合 [LS1, KLL18+, EMS, LS2] の証明は次章で説明する議論を基にしている.

## 2 一意性の証明方法

[LS1] で与えた正則 VOA の一意性の証明方法について述べる. $\mathfrak{g}$ をリー代数, $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の部分代数, $W$ を中心電荷 $c$ の正則 VOA, $n$ を正の整数とする. 次を仮定する.

仮定 1: $V_1\cong\mathfrak{g}$ を満たす任意の中心電荷 $c$ の正則 VOA $V$ に対して, $\widetilde{V}_\sigma\cong W$ と $V_1^\sigma\cong\mathfrak{p}$ を満たす位数 $n$ の $V$ の自己同型 $\sigma$ が存在する.

仮定 2: 次の条件を満たす位数 $n$ の自己同型 $\psi\in\mathrm{Aut}W$ の共役類はただ一つである: $W_1^\psi\cong\mathfrak{p}$ かつ $(\tilde{W}_\psi)_1\cong\mathfrak{g}$.

**定理 2.1.** [LS1] 仮定 1 と 2 を満たすとする. このとき, $V_1\cong\mathfrak{g}$ であるような任意の中心電荷 $c$ の正則 VOA $V$ は $\tilde{W}_\psi$ と同型である. 特に, $V$ の VOA 構造は $V_1\cong\mathfrak{g}$ から一意的に決まる.

証明. 仮定 1 から, $\mathbb{Z}_n$-軌道体構成法を $V$ と $\sigma$ に適用して $V_1^\sigma\cong\mathfrak{p}$ かつ $\tilde{V}_\sigma\cong W$ が得られる. この逆を辿ることで, $W$ は位数 $n$ の自己同型 $g$ で, $W_1^g\cong\mathfrak{p}$ かつ $\widetilde{W}_g\cong V$ となるものを持つ. 特に, $(\widetilde{W}_g)_1\cong\mathfrak{g}$ である. よって, 仮定 2 から, $g$ は $\psi$ と共役になり, $V\cong\widetilde{W}_g\cong\widetilde{W}_\psi$ を得る. □

## 3 主結果

前章の証明方法を $W$ がリーチ格子 VOA $V_\Lambda$ の場合に適用して, 次の結果を得た.

**定理 3.1.** [LS2] 共形重み 1 の空間のリー代数構造が $A_{3,4}^3A_{1,2}$, $A_{4,5}^2$, $D_{4,12}A_{2,6}$, $A_{6,7}$, $A_{7,4}A_{1,1}^3$, $D_{5,8}A_{1,2}$ または $D_{6,5}A_{1,1}^2$ である正則 VOA は同型を除いて一意的である.[注10]

**系 3.2.** これら正則 VOA はリーチ格子 VOA から軌道体構成法で得られる.

注10 $X_{n,k}$ は $X_n$ 型の単純リー代数でレベルが $k$ を意味する.

**注意 3.3.** $A_{6,7}$ の場合は既に $V_\Lambda$ から $\mathbb{Z}_7$-軌道体構成法で構成されている ([LS16b]). それ以外の場合は新しい構成法である.

系から次の問題が自然に得られる.

**問題 3.4.** リーチ格子 VOA から軌道体構成法で得られる中心電荷 24 の正則 VOA を全て求めよ.[注 11]

**注意 3.5.** $A_{3,4}^3A_{1,2}$ と $A_{4,5}^2$ の場合の一意性は, [EMS] で別の軌道体構成法を用いて証明されている.

# 4 具体例: $D_{5,8}A_{1,2}$

この章では $W = V_\Lambda$, $c = 24$, $\mathfrak{g} = D_{5,8}A_{1,2}$, $\mathfrak{p} = U(1)^6$, $n = 8$ の場合に仮定 1,2 が満たされることを説明する. ただし, $U(1)^6$ は 6 次元の可換リー代数である. したがって, 定理 2.1 から, 定理 3.1 が $D_{5,8}A_{1,2}$ の場合に成立する. 他の場合もほぼ同様な議論によって示させる.

## 4.1 仮定 1

まず

$$u := \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{5}(\Lambda_i, 0) + \frac{1}{2}(0, \Lambda_1) \in V_1, \qquad \sigma := e^{2\pi\sqrt{-1}u_{(0)}} \in \mathrm{Aut}V$$

と置き, $\sigma$ が求める自己同型であることを確認する. ここで, $\sum_{i=1}^{5}(\Lambda_i, 0)$ と $(0, \Lambda_1)$ はそれぞれルート系 $D_5$ と $A_1$ の Weyl ベクトルである. また, 係数の分母に表れる 8 と 2 がそれぞれ $D_5$ と $A_1$ のコクセター数である. これらの性質から $V_1^\sigma = U(1)^6$ が容易に確認できる. 実際に, $u$ と $V_1$ のルートとの内積は整数とならないため, $V_1^\sigma$ にルート空間は含まれない. 一方で (6 次元の) Cartan 部分代数は $\sigma$ で固定される.

さて, $U$ を $V_1$ から生成される部分 VOA とする. すると $U \cong L_{D_5}(8,0) \otimes L_{A_1}(2,0)$ であり[注 12], 既約 $L_{D_5}(8,0) \otimes L_{A_1}(2,0)$-加群で共形重みが 2 以上の整数であるものが丁度 46 個存在する. このことは単純アフィン VOA の既約加群の分類結果 [FZ92] から確認できる. したがって, $V$ の既約 $U$-部分加群は $U$ またはこの 46 個の既約加群のいずれかと同型である. 既約 $U$-加群 $M$ がこの 46 個のいずれか, または $U$ のとき, 次が成立する.

- $M$ の最高ウェイト $\lambda$ は $(\lambda|u) \in (1/8)\mathbb{Z}$ を満たす.
- $M$ に $\Delta$-作用素 ([Li96]) を適用して得られる $\sigma$-twisted 加群 $M^{(u)}$ の共形重みは 1 以上である.

注 11 Möller の講演で 51 個の場合はリーチ格子 VOA から構成できたとのアナウンスがあった.
注 12 $L_{X_n}(k,0)$ で $X_n$ 型の単純リー代数に付随するレベル $k$ の単純なアフィン VOA を表す.

一つ目は既約加群のリストから容易にわかる．二つ目は [LS16a] で与えた計算方法を用いて確認できる．これらから，$\sigma_u$ の $V$ 上での位数は 8 であり，既約 $\sigma$-twisted $V$-加群 $V^{(u)}$ の共形重みは 1 以上であることがわかる．

ここで [EMS] で与えられた $n=8$ の場合の次元公式を用いる:

$$\dim(\tilde{V}_\sigma)_1 = 24 + 12\dim V_1^\sigma - 3\dim V_1^{\sigma^2} - \frac{3}{4}\dim V_1^{\sigma^4} - \frac{1}{4}\dim V_1.$$

「既約 $\sigma$-twisted $V$-加群 $V^{(u)}$ の共形重みが 1 以上」という性質はこの公式を適用するために必要な仮定であることを注意しておく．[注 13] よって，各項を計算することで $\dim(\tilde{V}_\sigma)_1 = 24$ を得て，[DM04a] から $\tilde{V}_\sigma \cong V_\Lambda$ を得る．したがって，仮定 1 が成立する．

## 4.2　仮定 2

実際には，次の仮定 2' を用いる．

仮定 2': 次の条件を満たす位数 $n$ の自己同型 $\psi \in \mathrm{Aut}W$ の共役類はただ一つである: $W_1^\psi \cong \mathfrak{p}$ かつ，行列 $(\frac{2(u|v)}{(u|u)})_{u,v\in\Pi}$ は $\tilde{D}_5$ 型の一般化されたカルタン行列と (置換行列の共役で) 同値である．ただし $\Pi$ は $W[\psi]_1$ の $W_1^\psi$ の作用に関するウェイトの集合である．

仮定 2 と異なるのは最後の条件であり，これは仮定 2 の条件「$(\widetilde{W_g})_1 \cong \mathfrak{g}$」よりも弱い．実際に，$(\widetilde{W_g})_1 \cong \mathfrak{g}$ から，$W[\psi]_1$ が $\mathfrak{g}$ の位数 8 の regular 自己同型[注 14]の固有値 $e^{\pi\sqrt{-1}/4}$ の固有空間であるから，$W[\psi]_1$ のウェイトは $D_5$ 型の単純ルートと 最高ウェイトの $-1$ 倍の和集合である．よって，仮定 2 から仮定 2' が従う．

まず $V_\Lambda$ の自己同型群に関して

$$1 \to \{\sigma_x \mid x \in \mathbb{C}^{24}/\Lambda\} \to \mathrm{Aut}V_\Lambda \to O(\Lambda) \to 1$$

という完全系列があることを思い出す ([DN99])．ただし $O(\Lambda)$ は $\Lambda$ の等長変換のなす群である．よって，$g \in O(\Lambda)$ と $x \in \mathbb{C}^{24}/\Lambda$ を用いて

$$\psi = \sigma_x \phi_g$$

とかける．ただし $\phi_g \in \mathrm{Aut}V_\Lambda$ は $g \in O(\Lambda)$ の標準持ち上げである．[注 15]

まず $g$ の共役類について考える．[HL90] において，全ての $g \in O(\Lambda)$ に対して，$\Lambda^g$ と特性多項式が計算されている．ここから [Le85, DL96] を用いて $\dim(W[\psi])_1$ を調べることで次を得る．[注 16]

---

注 13 この仮定を満たさない場合は，次元公式はもっと複雑になる．

注 14 固定部分リー代数が abelian となるもの．位数がコクセター数と一致する場合は共役を除いて一意的 ([Ka90])．

注 15 $\phi_g$ が部分 VOA $V_{\Lambda^g}$ に自明に作用するときに標準持ち上げという．ここで $\Lambda^g = \{v \in \Lambda \mid g(v) = v\}$．

注 16 [HL90] から可能性のある共役類の候補が数個になる．さらに，$8E$ 以外の場合は，“あらゆる $x$ を考えても $\dim(W[\psi])_1 \neq 6$” を示して排除する．

**補題 4.1.** (cf. [HL90]) $g \in O(\Lambda)$ が位数 $1, 2, 4, 8$ とする．$\mathrm{rank}\,\Lambda^g = 6$ かつ $\dim(W[\psi])_1 = 6$ ならば $g$ の $O(\Lambda)$ における共役類は $8E$.

我々の設定はこの補題の仮定を満たしている．実際に, $\psi$ の位数が 8 から, $g$ の位数が 8 の約数である．そして, $(V_\Lambda^\psi)_1$ は可換リー代数であり, その次元は $\mathrm{rank}\,\Lambda^g$ と等しい．さらに, 仮定 2' から $\dim(W[\psi])_1 = 6$ を得る．

また, 標準持ち上げについては次が知られている．

**補題 4.2.** 標準持ち上げは $\mathrm{Aut}V_\Lambda$ における共役を除いて一意的である．

以上の結果から, $\sigma_x$ の部分の一意性のみを考えれば良い．内部自己同型による $\psi$ への共役を考えることで $x \in \mathbb{C} \otimes \Lambda^g$ とできる．よって $\sigma_x$ と $\phi_g$ は可換としてよい．ここで $\sigma_x^8 = id$ から, $x \in \frac{1}{8}\Lambda^g$ である．さらに $y \in P_0(\Lambda)$ に対して $\sigma_y\phi_g \sim \phi_g$ から $x \in \frac{1}{8}\Lambda^g/P_0(\Lambda)$ としてよい．ただし $P_0 : \Lambda \to \mathbb{Q} \otimes \Lambda^g$ は直交射影である．また, 具体的な twisted-加群の構成 ([Le85, DL96]) から, $W[\psi]_1$ の $W_1^\psi$ に関するウェイトは $\{y \in x + P_0(\Lambda) \mid |y|^2 = 1/4\}$ で与えられることがわかる．さらに, $\frac{1}{8}\Lambda^g/P_0(\Lambda)$ における $C_{O(\Lambda)}(g)$ による軌道分解をすることで, 次の性質を満たす軌道 $O$ がただ一つ存在することがわかる[注 17]: $O$ に属する $x + P_0(\Lambda)$ のノルム 1/4 のベクトルの集合 $Y$ に対して, $(\frac{2(u|v)}{(u|u)})_{u,v\in Y}$ が $\tilde{D}_5$ 型の一般カルタン行列と同値.

$C_{O(\Lambda)}(g)$ の $\mathrm{Aut}V_\Lambda$ への持ち上げの共役を考えることで, $\sigma_x\phi_g$ が共役を除いてただ一つであることがわかる．したがって, 仮定 2' を満たす $\psi$ は共役を除いてただ一つであることがわかる．

## 参考文献


[ALY18+] T. Abe, C.H. Lam and H. Yamada, A remark on $\mathbb{Z}_p$-orbifold constructions of the Moonshine vertex operator algebra, arXiv:1705.09022, *Math. Z.* (to appear).

[Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[BCP97] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, The Magma algebra system I: The user language, *J. Symbolic Comput.* **24** (1997), 235–265.

[Co69] J.H. Conway, A characterisation of Leech's lattice, *Invent. Math.* **7** (1969) 137–142.

[DGM96] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theories, representations and lattice constructions, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 61–120.

[DGL07] C. Dong, R.L. Griess and C.H. Lam, Uniqueness results for the moonshine vertex operator algebra, *Amer. J. Math.* **129** (2007), 583–609.

[DLM00] C. Dong, H. Li, and G. Mason, Modular-invariance of trace functions in orbifold theory and generalized Moonshine, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 1–56.

[DM04a] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* (2004), 2989–3008.


[注 17] ソフトウェア MAGMA [BCP97] を用いた.

[DM04b] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.

[DM06] C. Dong and G. Mason, Integrability of $C_2$-cofinite vertex operator algebras. *Int. Math. Res. Not.* (2006), Art. ID 80468, 15 pp.

[DN99] C. Dong and K. Nagatomo, Automorphism groups and twisted modules for lattice vertex operator algebras, *in* Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), 117–133, *Contemp. Math.*, **248**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[DL96] C. Dong and J. Lepowsky, The algebraic structure of relative twisted vertex operators, *J. Pure Appl. Algebra* **110** (1996), 259–295.

[EMS18+] J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer, Construction and classification of holomorphic vertex operator algebras, *J. Reine Angew. Math.* (Published Online).

[EMS] J. van Ekeren, S. Möller and N. Scheithauer, Dimension Formulae in Genus Zero and Uniqueness of Vertex Operator Algebras, arXiv:1704.00478.

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

[FZ92] I. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992), 123–168.

[HL90] K. Harada and M.L. Lang, On some sublattices of the Leech lattice, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 435–446.

[Hö] G. Höhn, On the Genus of the Moonshine Module, arXiv:1708.05990.

[Ka90] V.G. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KLL18+] K. Kawasetsu, C.H. Lam and X. Lin, $\mathbb{Z}_2$-orbifold construction associated with $(-1)$-isometry and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, arXiv:1611.07655, *Proc. Amer. Soc.* (Published electronically).

[La11] C.H Lam, On the constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 153–198

[LL] C.H. Lam and X. Lin, A holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 with weight one Lie algebra $F_{4,6}A_{2,2}$, arXiv:1612.08123.

[LS12] C.H. Lam and H. Shimakura, Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** (2012), 540–576.

[LS15] C.H. Lam and H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Amer. J. Math.* **137** (2015), 111–137.

[LS16a] C.H. Lam and H. Shimakura, Orbifold construction of holomorphic vertex operator algebras associated to inner automorphisms, *Comm. Math. Phys.* **342** (2016), 803–841.

[LS16b] C.H. Lam and H. Shimakura, A holomorphic vertex operator algebra of central charge 24 whose weight one Lie algebra has type $A_{6,7}$, *Lett. Math. Phys.* **106** (2016), 1575–1585.

[LS1] C.H. Lam and H. Shimakura, Reverse orbifold construction and uniqueness of holomorphic vertex operator algebras; arXiv:1606.08979.

[LS2] C.H. Lam and H. Shimakura, On orbifold constructions associated with the Leech lattice vertex operator algebra; arXiv:1705.01281.

[LY07] C.H. Lam and H. Yamauchi, A characterization of the moonshine vertex operator algebra by means of Virasoro frames, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2007**, Art. ID rnm003, 10 pp.

[Le85] J. Lepowsky, Calculus of twisted vertex operators, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **82** (1985), 8295–8299.

[Li96] H. Li, Local systems of twisted vertex operators, vertex operator superalgebras and twisted modules, *in* Moonshine, the Monster, and related topics, 203–236, *Contemp. Math.*, **193**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[Mi13] M. Miyamoto, A $\mathbb{Z}_3$-orbifold theory of lattice vertex operator algebra and $\mathbb{Z}_3$-orbifold constructions, *in* Symmetries, integrable systems and representations, 319–344, *Springer Proc. Math. Stat.* **40**, Springer, Heidelberg, 2013.

[SS16] D. Sagaki and H. Shimakura, Application of a $\mathbb{Z}_3$-orbifold construction to the lattice vertex operator algebras associated to Niemeier lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), 1621–1646.

[Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), 159–185.

[Zh96] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.